1-Q-30　円調和展開における最大次数と対象音場半径と空間誤差の関係について

◎任　逸，羽田　陽一（電通大）

E-mail: yi.nin.ren@gmail.com　　Homepage: https://ninitsu.github.io/

はじめに

マイクロホンアレイ･スピーカアレイを用いた音場収音･音場再現技術

音場再現
by chatGPT

円調和関数･球面調和関数を用いて音場を展開

$$p(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{p}_n J_n(kr)e^{jn\phi}$$

(内部音場の一例，詳細は後述)

無限次数の打ち切り問題

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{\cdot\}\to\sum_{n=-N}^{N}\{\cdot\}+\varepsilon_N$ 誤差$\varepsilon_N=\sum_{|n|>N}\{\cdot\}$が生じる.

本発表の目的

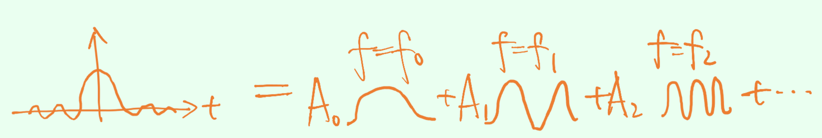
1. 従来セオリーの整理

2. 目標誤差領域範囲の予測 (与えられた最大次数と周波数に対して)

空間フーリエ変換と円調和展開

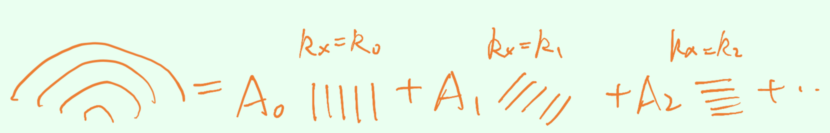
時間t→周波数領域ωの変換であるフーリエ変換　（逆変換のイメージ）

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$



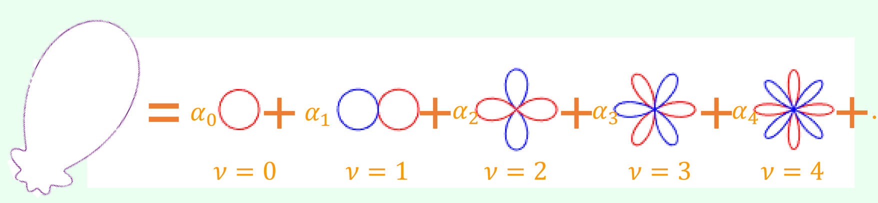
に対し，空間フーリエ変換は空間x→波数領域kの変換

$$\tilde{h}(k_x)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{jk_x x}dx$$



極座標系の場合，円調和領域への変換となる

$$\tilde{h}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\phi)e^{-jn\phi}d\phi$$



2次元音場の展開

2次元音圧場の円調和領域の展開は

$$p(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\tilde{p}_n^{\mathrm{int}}J_n(kr)e^{jn\phi}+\tilde{p}_n^{\mathrm{ext}}H_n(kr)e^{jn\phi}\right\}$$

(r,ϕ)はマイク座標，$J_n(z)$はBessel関数，$H_n(z)$はHankel関数.

内部音場のみの場合（音源が含まれない境界内）

$$p(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{p}_n J_n(kr)e^{jn\phi}$$

ここで$\tilde{p}_n$は座標に依存しない展開係数.

次数打ち切り

音場収音や音場再現の研究において，数値計算の都合上，前記の無限次音場展開式を有限の次数nで打ち切らないといけない.
このとき，打ち切った高次の成分が展開の誤差となる.

$$p(r,\phi)=\sum_{n=-N}^{N}\tilde{p}_n J_n(kr)e^{jn\phi}+\varepsilon_N$$

半径rの円周上における相対空間誤差は

$$\bar{\varepsilon}_N(r)=\frac{\int_0^{2\pi}\left|\sum_{|n|>N}\tilde{p}_n J_n(kr)e^{jn\phi}\right|^2 d\phi}{\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{p}_n J_n(kr)e^{jn\phi}\right|^2 d\phi}$$

なお，任意の内部音場は平面波展開の形で書ける.

$$\tilde{p}_n=j^n\int_0^{2\pi}a(\varphi)e^{jn\varphi}d\varphi$$

$a(\varphi)$はφ方向から到来する平面波の重みである.
式を整理すると空間誤差は

$$\bar{\varepsilon}_N(r)=\frac{\sum_{|n|>N}J_n^2(kr)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n^2(kr)}=\sum_{|n|>N}J_n^2(kr)$$

となる.[Kennedy+2007]

打ち切り次数の決め方

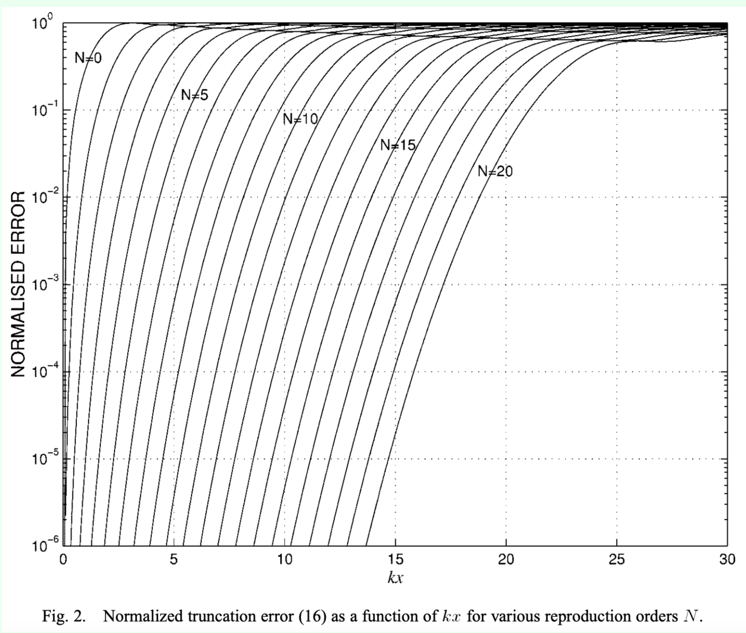


Fig. 2. Normalized truncation error (16) as a function of kr for various reproduction orders N.

- $N=\lceil kr\rceil$
  一番よく使われている経験則.
  Bessel関数の振幅が小さくなる次数.
  で打ち切る[Ward+2001]

  概ね4% ≈ −14 dBの誤差.

  粒子速度場も考慮すると
  $N=\lceil kr\rceil+1$の方が正確であるとの主張も.[Grandjean+2018]

- $N=\lceil ekr/2\rceil$
  Bessel関数の不等式$|J_n(kr)|\le\frac{(kr)^2}{2^n n!}, kr\ge 0$を用いて導出された
  $N=\lceil ekr/2\rceil+\Delta$で打ち切った場合，誤差が$0.0093e^{-2\Delta}$以下.
  [Kennedy+2007]

  概ね1% ≈ −20 dB以下の誤差.

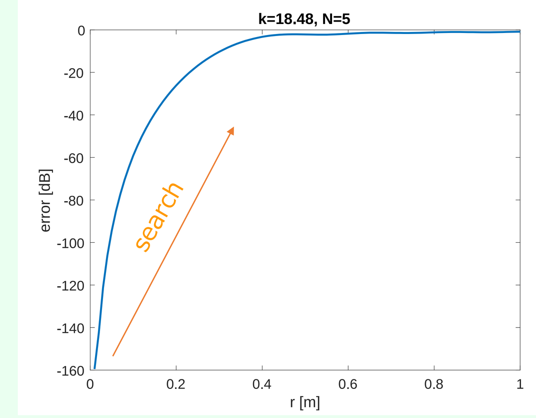
*制御自由度の制限$N=\lceil(M-1)/2\rceil$は本発表の議論対象外.

最大次数と誤差目標値からの対象音場半径予測

空間誤差$\bar{\varepsilon}_N(r)$は半径rと最大次数Nに関する関数である.
→許容できる空間誤差と打ち切り次数から半径を予測できる？

提案方法1. 半径r探索

Bessel関数の曲線から，空間誤差
$\bar{\varepsilon}_N(r)=1-\sum_{n=-N}^{N}J_n^2(kr)$
がrに対して単調増加の傾向を示しているので，
半径を0から徐々に増加させて，空間誤差が
設定した目標値に達するまで探索する.



提案方法2. 不等式上限求解

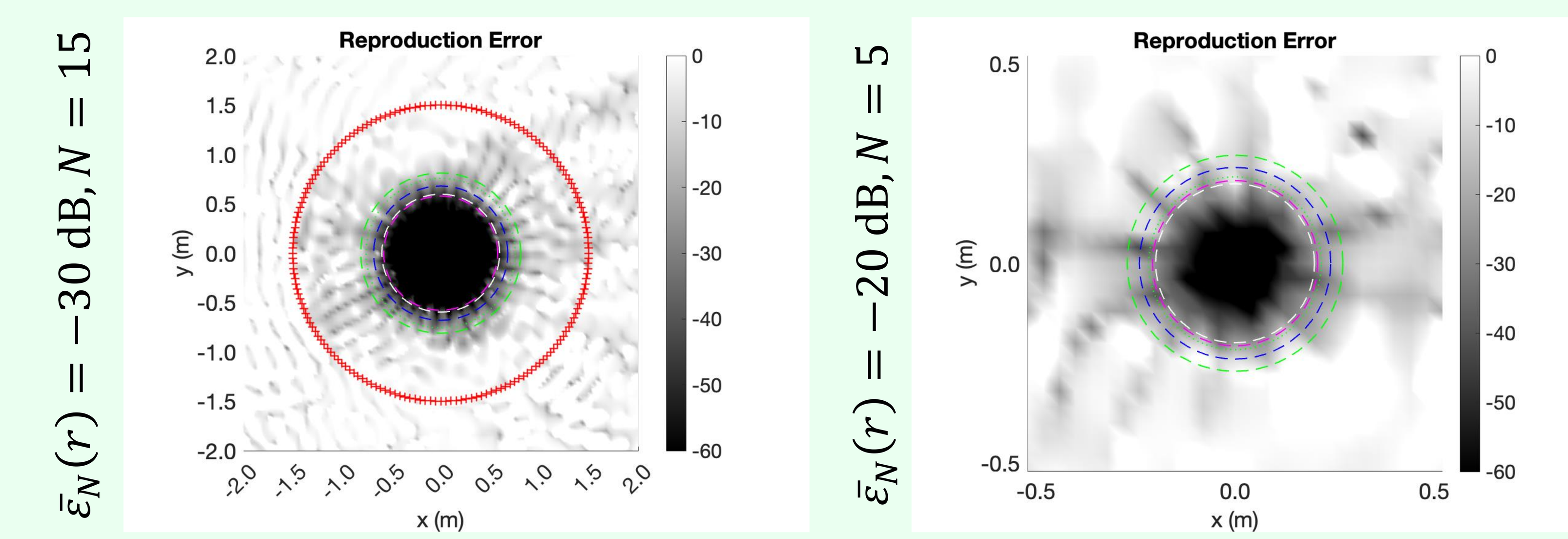
不等式[Kennedy+2007]

$$\bar{\varepsilon}_N(r)\le 2\frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{2N+2}}{\left((N+1)!\right)^2}\frac{(N+2)^2}{(N+2)^2-\left(\frac{kr}{2}\right)^2}$$

の上限に達するとき，式をrに関する$(2N+2)$次方程式に変形し，
数値解を求める.

1000 Hz複数ランダム平面波音場の再現における半径予測

再生系: 半径1.5 m の円周上に等角度配置の180 chスピーカ(赤十字)
（許容できる）目標誤差$\bar{\varepsilon}_N(r)$，最大次数N



各手法で算出した対象音場エリアは：緑破線$r=N/k$，緑点線$r=(N-1)/k$，
白破線$r=2N/ek$，青破線半径探索，マゼンタ破線不等式上限求解.

対象半径内の音場再現誤差

計算方法	目標誤差−30 dB, $N=15$ 半径 [m]	空間誤差 [dB]	境界誤差 [dB]	目標誤差−20 dB, $N=5$ 半径 [m]	空間誤差 [dB]	境界誤差 [dB]
$r=N/k$	0.81	−26.40	−16.36	0.27	−21.03	−13.77
$r=2N/ek$	0.60	−56.22	−46.23	0.20	−37.96	−29.20
半径探索	0.68	−42.91	**−31.05**	0.21	−25.45	**−16.86**
不等式上限	0.58	−58.70	−47.22	0.24	−32.05	−25.37

- 半径探索の場合，境界上では目標値に近い誤差を得られた.
- 不等式上限の場合，結果が目標値から大きく離れることもある.
- $r=N/k$は-14 dB前後，$r=2N/ek$は-20 dB以下の誤差になることも再確認できた.

まとめ

本研究は，音場収音や音場再現などの分野で広く使われている円調和展開手法において，打ち切り次数･対象半径･空間誤差の関係性と次数打ち切りの経験則を整理した.
最大次数と誤差目標値を予め設定したとき，空間誤差がおおよそ誤差目標値となるような対象半径を予測手法を提案し，計算機シミュレーションにて結果を検証した.