3-P-15

楕円スピーカアレイに対する解析的な2次元音場再現法

☆任　逸，羽田　陽一（電通大）

mail: ren.yi@uec.ac.jp　　homepage: http://www.hanedalab.inf.uec.ac.jp/student/member/nin/index.html

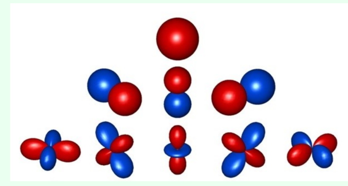
研究背景

音場再現

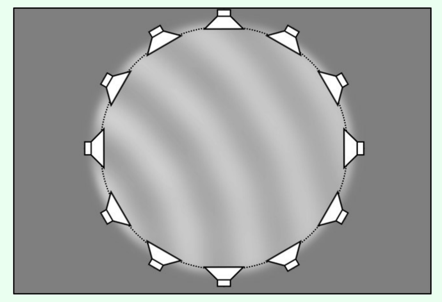
円形・直線などのスピーカアレイを用いた再現

アンビソニックス

円・球面調和展開；駆動信号は解析的
部屋形状によって円形アレイは配置しづらい場合あり

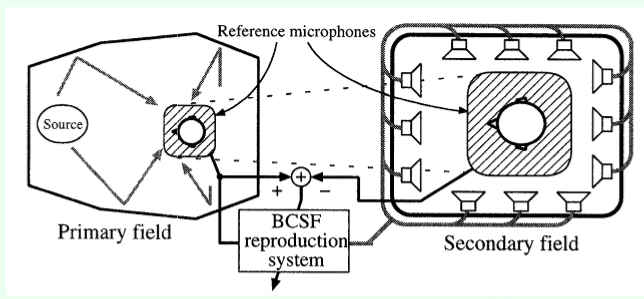


球面調和関数



境界音場制御法（BoSC）

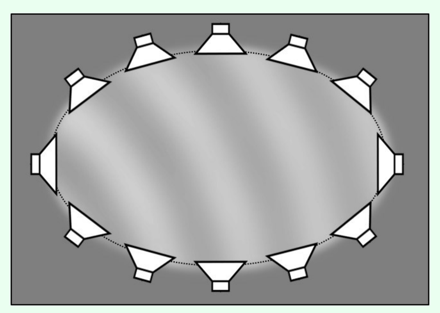
任意形状のアレイ
最小二乗解



[伊勢 1997]

楕円スピーカアレイ

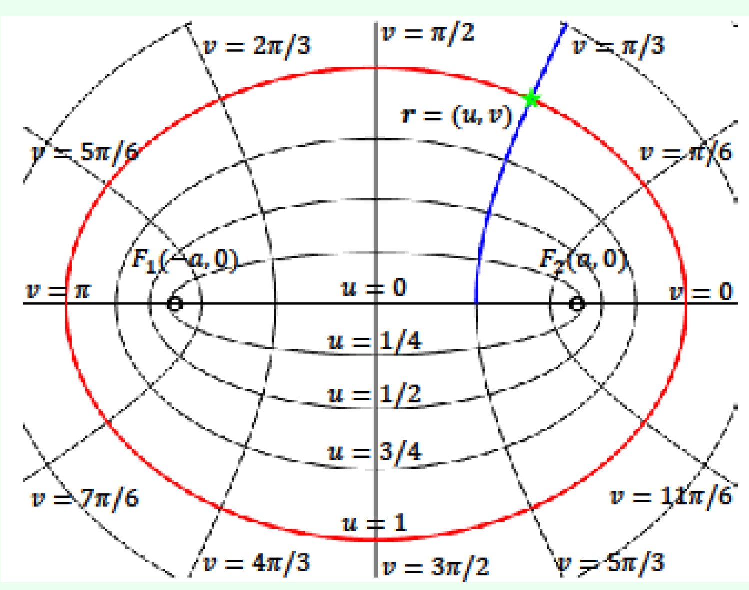
一般的な部屋に対して，円形アレイより楕円形アレイのほうが配置しやすい。



Mathieu関数を用いた音場展開で解析的な駆動信号を求める。

楕円座標系と波動方程式の解

座標系の定義



楕円座標系

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = a \sinh u \sin v \end{cases}$$

$v \in [0, 2\pi]$
$u \in [0, \infty)$
a: 焦点距離
$F_1(-a, 0), F_2(a, 0)$: 焦点

楕円曲線

$u = u_0$ (u_0: const)

ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2\psi(v,u) + k^2\psi(v,u) = 0 \qquad k: 波数$$

楕円座標系ラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2(\cosh 2u - \cos 2v)}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

変数分離：$\psi(v,u) = N(v) \cdot M(u)$
ここでヘルムホルツ方程式のひとつの解は

$$N(v) = \left\{S_{\zeta n} \,|\, \zeta \in \{e, o\}\right\} \quad : \text{Mathieu angular function}$$

$$M(v) = \left\{J_{\zeta n}, Y_{\zeta n}, H_{\zeta n}^{(1)}, H_{\zeta n}^{(2)} \,|\, \zeta \in \{e, o\}\right\} \quad : \text{Mathieu radial function}$$

である。

提案手法

音場展開

$$P(v,u) = \sum_{\zeta}\sum_{n}\left[A_{\zeta n}^{\mathrm{inc}} S_{\zeta n}(q,v) J_{\zeta n}(q,u) + A_{\zeta n}^{\mathrm{sca}} S_{\zeta n}(q,v) H_{\zeta n}^{(2)}(q,u)\right]$$

$\zeta \in \{e, o\}$: e(ven)は余弦項，o(dd)は正弦項を示す。

$$n = \begin{cases} 0,1,2,\ldots & \zeta = e \\ 1,2,3,\ldots & \zeta = o \end{cases}, \qquad q = \frac{k^2a^2}{4}$$

補足： S_{en}, S_{on}それぞれの性質は余弦関数cos，正弦関数sinに，$J_{\zeta n}, Y_{\zeta n}, H_{\zeta n}^{(1)}, H_{\zeta n}^{(2)}$それぞれの性質はベッセル関数$J_n$，ノイマン関数$Y_n$、第1，2種ハンケル関数$H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$に似ている。Mathieu関数に関する計算や性質は[Morse, P. M., & Feshbach, H. (1953). Methods of Theoretical Physics. NY: McGraw-Hill.]の§11に詳しい。

モードマッチング法

一次音場では，スピーカアレイの内側に音源がないことを仮定し，アレイ内側の音場展開を考えると，散乱波項がなくなり，展開は

$$P(v,u) = \sum_{\zeta}\sum_{n} A_{\zeta n} S_{\zeta n}(q,v) J_{\zeta n}(q,u)$$

となる。

ここでスピーカアレイによる二次音場を考える:
スピーカを$u = u_0$の楕円曲線上に連続的に配置したときの音場は

$$\hat{P}(v,u) = \int_0^{2\pi} G(v,u|v_l,u_0) D(v_l)\, u_0 dv_l$$

(v_l, u_0)はスピーカ座標，Dは駆動信号とし，Gは自由音場のグリーン関数:

$$G(v,u|v',u') = -\frac{j}{4}H_0^{(2)}(k\|(v,u)-(v',u')\|)$$
$$= -j\sum_{\zeta}\sum_{n}\left\{\frac{S_{\zeta n}(q,v')}{M_{\zeta n}(q)} S_{\zeta n}(q,v) J_{\zeta n}(q,u_<) H_{\zeta n}^{(2)}(q,u_>)\right\}$$

ここで$M_{\zeta n}(q)$は正規化係数。

駆動信号をMathieu関数で展開し，Mathieu関数の直交性:

$$\int_0^{2\pi} S_{\zeta n}(q,v) S_{\zeta' n'}(q,v) dv = M_{\zeta n}(q)\delta_{\zeta\zeta'}\delta_{nn'}$$

により

$$\hat{P}(v,u) = \sum_{\zeta}\sum_{n} \beta_{\zeta n} d_{\zeta n} S_{\zeta n}(q,v) J_{\zeta n}(q,u)$$
$$\beta_{\zeta n} = -jH_{\zeta n}^{(2)}(q,u_0)$$

が求められる。

モードごとに二次音場を一次音場と一致させると，駆動信号の展開係数は

$$d_{\zeta n} = \alpha_{\zeta n}/\beta_{\zeta n}$$

となり，駆動信号は

$$D(v_l) = \sum_{\zeta}\sum_{n} d_{\zeta n} S_{\zeta n}(q,v_l)$$

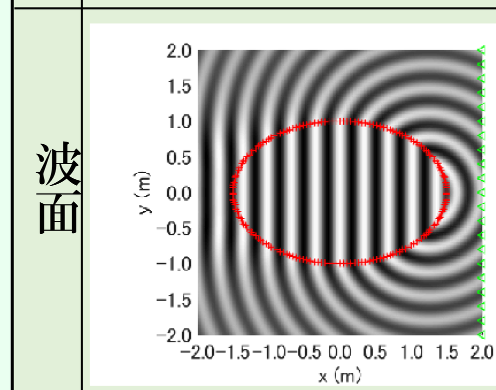
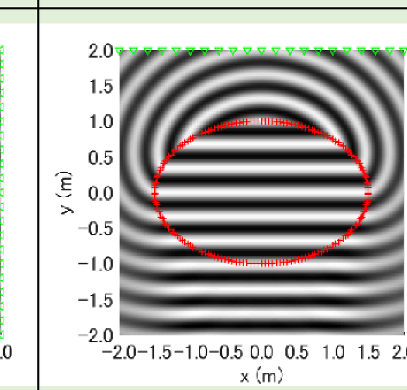
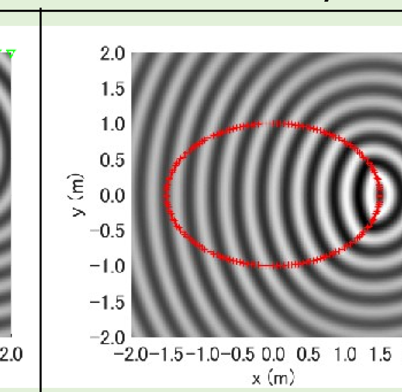
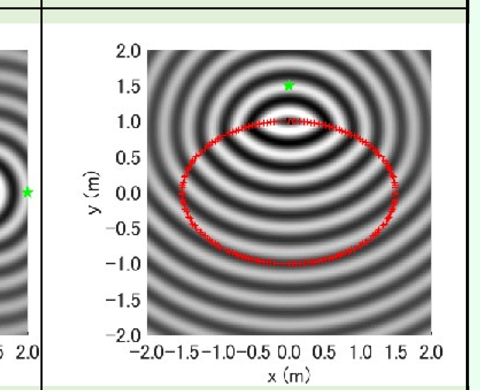
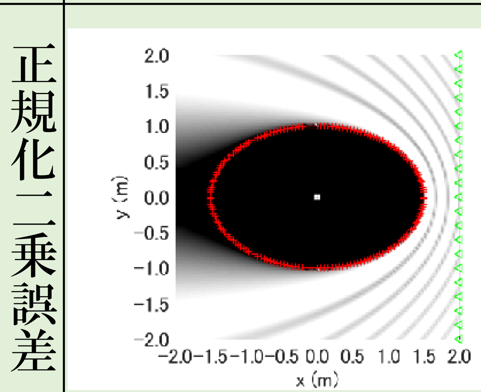
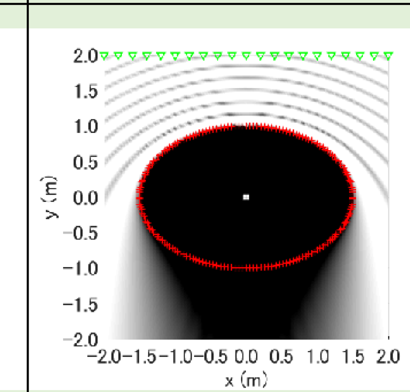
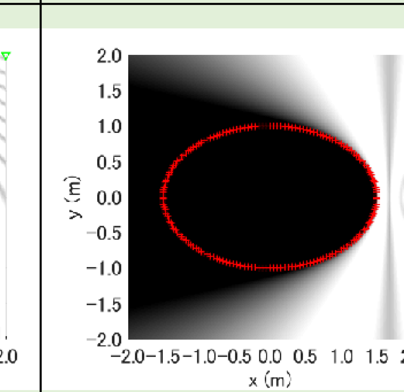
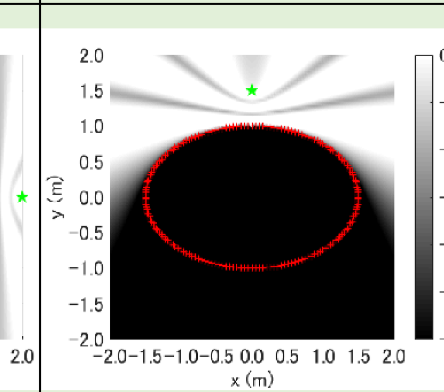
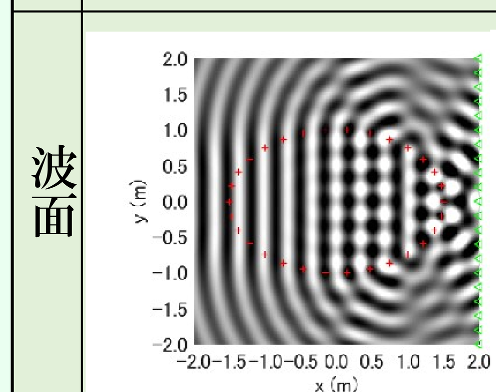
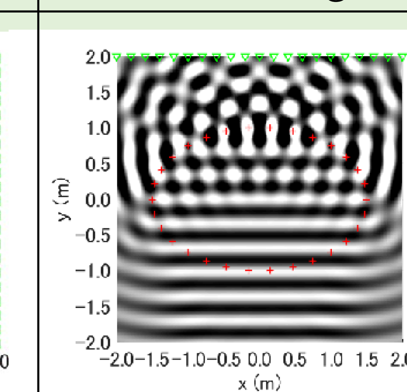
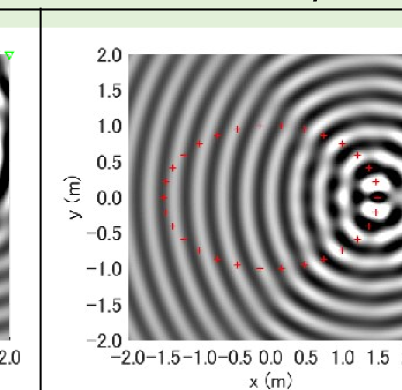
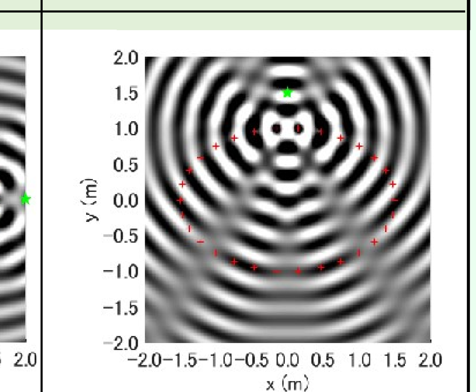
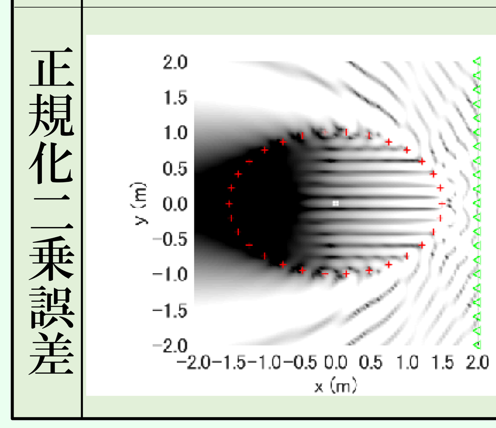
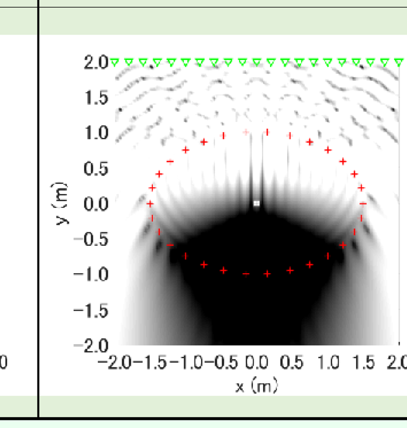
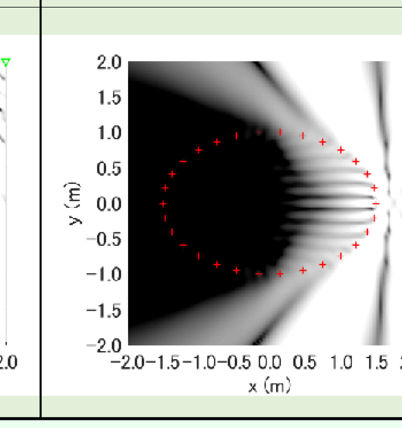
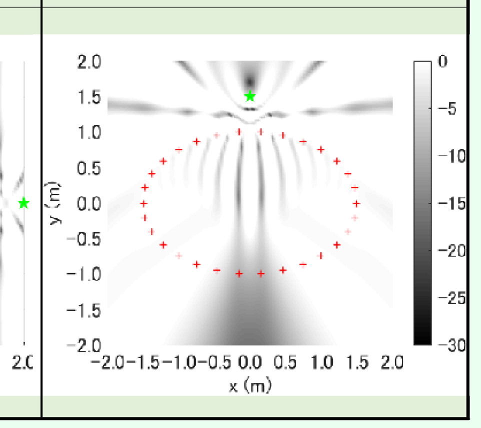
と解析的に導出できる。

注意: 離散配置のスピーカアレイにおいては，二次音場の展開式が$\sum_l G(v,u|v_l,u_0)D(v_l)$となり，直交性の式の右側に係数$L/2\pi$が付く（$L$はスピーカ数）。

計算機シミュレーション

シミュレーション条件

楕円座標系: $a = \sqrt{5}/2$
アレイ形状: 楕円；長軸3 m，短軸2 m；$u_0 \approx 0.80$
周波数: 1000 Hz 単一周波数；$q \approx 106.72$；打切り次数: 30
所望一次音場:
(a) 平面波，到来方向$\varphi = 0$；(b) 平面波，到来方向$\varphi = \pi/2$；
(c) 円筒波，音源位置 (2, 0)；(d) 円筒波，音源位置 (0, 1.5)。

	(a)	(b)	(c)	(d)
	スピーカ数: 180　等角度$\Delta v = \pi/90$			
波面				
正規化二乗誤差				
	スピーカ数: 30　等角度$\Delta v = \pi/15$			
波面				
正規化二乗誤差				

赤十字: スピーカ位置; 緑三角: 平面波の到来方向; 緑星: 円筒波の音源位置;
正規化二乗誤差: $\varepsilon = 10\log_{10}\left(|\hat{P} - P|^2/|P|^2\right)$が小さい(黒)ほど性能が良い。
スピーカ数の減少により誤差が生じることがわかった。
音源の到来方向に誤差が生じやすい傾向があった。

まとめ

本研究では，楕円スピーカアレイ内部の音場を再現する解析的な手法を提案した。
シミュレーションにて平面波および円筒波の再現を確認できた。
今後は楕円外部の音場再現および次数に関する検討を行う。